ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THỦY

CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ABEL VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THỦY

CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ABEL VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong chương trình toán bậc phổ thông học sinh được làm quen với nhiều hằng đẳng thức quan trọng, đó là các hằng đẳng thức đáng nhớ liên quan đến khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

công thức tính tổng của cấp số nhân

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) = a^n - b^n,$$

đồng nhất thức Lagrange

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2, \ldots$$

và các ứng dụng của chúng trong số học, đại số, lượng giác và hình học.

Mục tiêu của luận văn "Các đồng nhất thức Abel và áp dụng" nhằm giới thiệu hai đồng nhất thức Abel liên quan đến các tổng sinh bởi dãy số $z_1, z_2, \ldots, z_n$:

$$Z_0 = 0, Z_1 = z_1, Z_2 = z_1 + z_2, \ldots, Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k, \ldots \tag{1}$$

và các tích sinh bởi dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$Q_0(x) = 0, Q_1(x) = x - x_1, Q_2(x) = (x-x_1)(x-x_2), \ldots, Q_k(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k), \ldots \tag{2}$$

và các ứng dụng của chúng trong đại số và số học.

Đồng nhất thức Abel liên quan đến các tổng (1) còn xuất hiện trong Giải tích (xem [4])

$$\sum_{k=1}^{n} z_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k (v_k - v_{k+1}) + Z_n v_n \tag{3}$$

dùng để khảo sát sự hội tụ của các chuỗi đan dấu.

Đặc biệt, đồng nhất thức Abel liên quan đến các tích (2) thường xuất hiện trong các tính toán với đa thức nhận giá trị nguyên hoặc giá trị hữu tỷ trên tập số nguyên dương (xem [1]-[2])

$$ax^2 + bx + c = \alpha\frac{(x-1)(x-2)}{2} + \beta(x-1) + \gamma, \tag{4}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} + \beta\frac{(x-1)(x-2)}{2!} + \gamma(x-1) + \delta, \ldots \tag{5}$$

Trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, Olympic Toán sinh viên, nhiều bài toán cần tới các đồng nhất thức (3)-(5), thường được gọi là biến đổi Abel, như là một công cụ hữu hiệu để tiếp cận những dạng toán thuộc loại khó không nằm trong chương trình chính khóa của chương trình Đại số và Giải tích bậc trung học phổ thông.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 3 chương.

Chương 1. Biến đổi Abel sinh bởi tổng các số và các hệ thức liên quan.

Chương 2. Biến đổi Abel sinh bởi tích các số và áp dụng.

Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

Tiếp theo, trong các chương đều trình bày một hệ thống bài toán lấy từ các đề thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic liên quan.

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy hướng dẫn GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Nhân dịp này tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, Ban giám hiệu và đồng nghiệp trường THPT Lý Nhân Tông thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh đã luôn bên tôi, cổ vũ, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn tốt nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Người viết luận văn

Đỗ Thị Thuỷ

Chương 1. Biến đổi Abel sinh bởi tổng các số và các hệ thức liên quan

Chương 1 giới thiệu đồng nhất thức Abel liên quan đến các tổng sinh bởi dãy số $z_1, z_2, \dots, z_n$:

$$Z_0 = 0, Z_1 = z_1, Z_2 = z_1 + z_2, \dots, Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k, \dots \tag{1.1}$$

Đồng nhất thức Abel liên quan đến các tổng (1) xuất hiện trong Giải tích (xem [4])

$$\sum_{k=1}^{n} z_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k(v_k - v_{k+1}) + Z_n v_n \tag{1.2}$$

dùng để khảo sát sự hội tụ của các chuỗi đan dấu.

1.1 Biến đổi Abel sinh bởi tổng các số

Trong các nghiên cứu về dãy số và chuỗi số, chúng ta thường sử dụng biến đổi sau đây, thường được gọi là *biến đổi Abel*.

Xét tổng

$$Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k, \;\; k = 1, 2, \dots, n$$

và

$$S_n = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_n &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2(Z_2 - Z_1) + \cdots + \alpha_n(Z_n - Z_{n-1}) \\ &= Z_1(\alpha_1 - \alpha_2) + Z_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + Z_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + Z_n\alpha_n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Từ biến đổi (1.3) này, ta có các kết quả sau đây (gọi là các bất đẳng thức Abel).

Định lý 1.1 (xem [1])**.** Giả sử (z_j) là một dãy số (thực hoặc phức) tuỳ ý và

$$Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó với mọi dãy số dương đơn điệu giảm (α_k):

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n > 0,$$

ta đều có

$$|\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n| \leqslant \alpha_1 \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_k|.$$

Chứng minh. Thật vậy, từ đồng nhất thức (1.3), ta nhận được

$$\begin{aligned}
&|\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \cdots + \alpha_n Z_n|\\
\leqslant\ &|Z_1|(\alpha_1 - \alpha_2) + |Z_2|(\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + |Z_{n-1}|(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + |Z_n|\alpha_n\\
\leqslant\ &\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_k|[(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n]\\
=\ &\alpha_1 \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_k|.
\end{aligned}$$

Định lý 1.2 (xem [1])**.** Giả sử (z_j) là một dãy số (thực hoặc phức) tuỳ ý và

$$Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó với mọi dãy số không âm và đơn điệu tăng (β_k):

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n,$$

ta đều có

$$|\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \cdots + \beta_n z_n| \leqslant 2\beta_n \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_k|.$$

Chứng minh. Ta xét tổng

$$S_n = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \cdots + \beta_n z_n.$$

Từ (1.3), ta có

$$\begin{aligned}
S_n &= \beta_1 Z_1 + \beta_2(Z_2 - Z_1) + \cdots + \beta_n(Z_n - Z_{n-1})\\
&= Z_1(\beta_1 - \beta_2) + Z_2(\beta_2 - \beta_3) + \cdots + Z_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) + Z_n\beta_n.
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}
|S_n| &= |Z_1(\beta_1 - \beta_2) + Z_2(\beta_2 - \beta_3) + \cdots + Z_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) + Z_n\beta_n|\\
&\leqslant |Z_1||\beta_1 - \beta_2| + |Z_2||\beta_2 - \beta_3| + \cdots + |Z_{n-1}||\beta_{n-1} - \beta_n| + |Z_n||\beta_n|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_k|[(\beta_2-\beta_1)+(\beta_3-\beta_2)+\cdots+(\beta_n-\beta_{n-1})+\beta_n]$$
$$= [(\beta_n-\beta_1)+\beta_n]\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k| \leqslant 2\beta_n \max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|.$$

Tiếp theo ta trình bày một dạng bất đẳng thức sau sử dụng biến đổi Abel, thường được gọi là Bất đẳng thức Karamata. Bất đẳng thức này có rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức Karamata)**.** Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a,b),\ k = 1,2,\ldots,n\}$, thoả mãn các điều kiện

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n,\ \ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geqslant y_1 \\ x_1+x_2 \geqslant y_1+y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \geqslant y_1+y_2+\cdots+y_{n-1} \\ x_1+x_2+\cdots+x_n = y_1+y_2+\cdots+y_n \end{cases} \tag{1.4}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi khả vi cấp 2 $f(x)$ trên $I(a,b)$, ta đều có

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geqslant f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n). \tag{1.5}$$

Chứng minh. Sử dụng biểu diễn đối với hàm lồi

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) =$$
$$= \max_{t_1,\ldots,t_n\in I(a,b)} \Big[\sum_{i=1}^n f(t_i) + \sum_{i=1}^n (x_i-t_i)f'(t_i)\Big]. \tag{1.6}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết bộ số $t_1,\ldots,t_n \in I(a,b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_n.$$

Khi đó, để chứng minh (1.6), ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x_1f'(t_1)+x_2f'(t_2)+\cdots+x_nf'(t_n) \geqslant$$
$$\geqslant y_1f'(t_1)+y_2f'(t_2)+\cdots+y_nf'(t_n). \tag{1.7}$$

Sử dụng biến đổi Abel

$$x_1f'(t_1)+x_2f'(t_2)+\cdots+x_nf'(t_n) =$$

$$= S_1[f'(t_1) - f'(t_2)] + S_2[f'(t_2) - f'(t_3)] + \cdots +$$
$$+ S_{n-1}[f'(t_{n-1}) - f'(t_n)] + S_n f'(t_n), \tag{1.8}$$

với

$$S_k(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Vì rằng $f''(x) > 0$ nên $f'(x_k) \leqslant f'(x_{k-1})$. Mặt khác, do $S_k(x) \geqslant S_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ và $S_n(x) = S_n(y)$, ta thu được ngay (1.7).

Nhận xét 1.4 (xem [5])**.** Hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a,b),\ k = 1, 2, \ldots, n\}$, thoả mãn các điều kiện (1.4) thường được gọi là biến đổi Schur's. Dãy $\{x_k\}$ được gọi là trội hơn dãy $\{y_k\}$.

Tính chất sau đây cho phép ta dễ dàng kiểm chứng tính lồi (lõm) đối với một hàm số cho trước.

Định lý 1.5 (Jensen)**.** Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},\ \ \forall x_1, x_2 \in I(a, b). \tag{1.9}$$

Chứng minh.

Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ thì ta có ngay (1.9) bằng cách chọn $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$.

Giả sử ta có (1.9). Ta cần chứng minh rằng với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$ thì $\beta \in \mathbb{Q}$ và ta có thể viết

$$\alpha = \frac{m}{q},\ \ \beta = \frac{n}{q},$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{N}$ và $m + n = q$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có ngay

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = f\Big(\frac{mx_1 + nx_2}{q}\Big)$$
$$\leqslant \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{q} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

Nếu α là số vô tỷ thì β $(= 1 - \alpha)$ cũng là số vô tỷ. Chọn dãy số hữu tỷ dương u_n trong khoảng (0,1) có giới hạn bằng α:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \alpha.$$

Khi đó, hiển nhiên dãy $v_n := 1 - u_n$ cũng nằm trong (0,1) và

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \beta.$$

Theo chứng minh trên ứng với trường hợp α hữu tỷ, thì

$$f(u_n x_1 + v_n x_2) \leqslant u_n f(x_1) + v_n f(x_2),\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_1, x_2 \in I(a,b).$$

Chuyển qua giới hạn và sử dụng tính liên tục của $f(x)$, ta thu được

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nhận xét 1.6. Giả sử $f(x) \not\equiv \text{const}$ và là hàm lồi trên $[a,b]$ với $f(a) = f(b)$. Khi đó $f(x) \neq f(a)$ với mọi $x \in (a,b)$.

1.2 Phương pháp làm trội dùng biến đổi Abel

Đôi khi để chứng minh một bất đẳng thức dạng

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq M$$

ta có thể làm trội $f(x_i) \leq G(y_{i+1}) - G(y_i)$ để thu được

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq G(y_n) - G(y_1).$$

Sau đó, ta chỉ cần chứng minh một bất đẳng thức đơn giản hơn dạng

$$G(y_n) - G(y_1) \leq M.$$

Ta có một số tổng thường dùng sau đây.

(a) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} = 1 - \dfrac{1}{n}.$

(b) $\dfrac{1}{x(x+d)} + \dfrac{1}{(x+d)(x+2d)} + \cdots + \dfrac{1}{[x+(n-1)d](x+nd)}$

$$= \frac{1}{d}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+nd}\Big) = \frac{n}{x(x+nd)}.$$

(c) $\dfrac{1}{1.2\ldots k} + \dfrac{1}{2.3\ldots(k+1)} + \ldots. + \dfrac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}$

$= \dfrac{1}{k-1}\Big[\dfrac{1}{1.2\ldots(k-1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}\Big], \forall k \geq 2.$